Conjuntos Fuzzy e Lógica Fuzzy

users.femanet.com.br/~fabri/fuzzy.htm

1 – Introdução

Os Conjuntos Fuzzy e a Lógica Fuzzy provêm a base para geração de técnicas poderosas para a solução de problemas, com uma vasta aplicabilidade, especialmente, nas áreas de controle e tomada de decisão.

A força da Lógica Fuzzy deriva da sua habilidade em inferir conclusões e gerar respostas a partir de em informações vagas, ambíguas e qualitativamente incompletas e imprecisas. Neste aspecto, os sistemas de base Fuzzy têm habilidade de raciocinar de forma semelhante à dos humanos. Seu comportamento é representado de maneira muito simples e natural, levando à construção de sistemas compreensíveis e de fácil manutenção.

A Lógica Fuzzy é baseada na teoria dos Conjuntos Fuzzy. Esta é uma generalização da teoria dos Conjuntos Tradicionais para resolver os paradoxos gerados à partir da classificação "verdadeiro ou falso" da Lógica Clássica. Tradicionalmente, uma proposição lógica tem dois extremos: ou "completamente verdadeiro" ou "completamente falso". Entretanto, na Lógica Fuzzy, uma premissa varia em grau de verdade de 0 a 1, o que leva a ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa.

Com a incorporação do conceito de "grau de verdade", a teoria dos Conjuntos Fuzzy estende a teoria dos Conjuntos Tradicionais. Os grupos são rotulados qualitativamente (usando termos lingüístico, tais como: *alto*, *morno*, *ativo*, *pequeno*, *perto*, etc.) e os elementos deste conjuntos são caracterizados variando o grau de pertinência (valor que indica o grau em que um elemento pertence a um conjunto). Por exemplo, um homem de 1,80 metro e um homem de 1,75 metro são membros do conjunto "*alto*", embora o homem de 1,80 metro tenha um grau de pertinência maior neste conjunto.

Com base nesta breve introdução, será conceitualizada a teoria dos Conjuntos Fuzzy, Lógica Fuzzy e das Proposições Fuzzy nas seguintes seções. Estas conceitualizações se fazem necessárias neste trabalho, pois a sua espinha dorsal é, totalmente, baseada nos conceitos de RNAs apresentadas anteriormente e na teoria dos Conjuntos Fuzzy.

2 – Teoria dos Conjuntos Tradicionais

A teoria dos Conjuntos Fuzzy é em grande parte uma extensão da teoria dos Conjuntos Tradicionais. Baseando-se nesta declaração é apropriado fazer uma breve revisão de conceitos da teoria dos Conjuntos Tradicionais.

Existem três métodos através do qual um conjunto A sobre o conjunto universo X pode ser definido:

1. Um conjunto A cujo os membros são a_1, a_2, a_3 é geralmente definido por:

$$A = \{ a_1, a_2, a_3 \} \qquad (1)$$

Este tipo de definição é aplicado somente a conjuntos finitos.

2. Um conjunto também pode ser definido por:

$$A = \{x|P(x)\}, \qquad (2)$$

onde o símbolo | denota a frase “tal que,” e $P(x)$ designa a proposição da forma “x tem a propriedade P”. Isto é, A é definido por esta notação como o conjunto de todos elementos de X para qual a proposição $P(x)$ é verdadeira.

3. Um conjunto é definido por uma função geralmente chamada de *função característica*, que declara quais elementos de X são membros do conjunto e quais não são. Um conjunto A é definido por sua função característica, γ_A representada em (3)

$$\gamma_A(x) = \begin{cases} 1 & para \quad x \in A \\ 0 & para \quad x \notin A \end{cases} \qquad (3)$$

Caso um conjunto não contenha nenhum membro este conjunto é chamado de conjunto vazio e representado por $\varnothing$.

Alguns Conjuntos Tradicionais podem ser vistos na Tabela 1:

Conjunto	Elementos	Descrição
Z	{. . ., -2, -1, 0, 1, 2, . . .}	Conjunto dos Números Inteiros
N	{1, 2, 3, . . . }	Conjunto dos Números Naturais
N_0	{0, 1, 2, . . . }	Conjunto dos Números Inteiros não-negativos
N_n	$\{1, 2, 3, \ldots n\}$	
$N_{0,n}$	$\{0, 1, 2, \ldots n\}$	
R		Conjunto dos Números Reais
R^+		Conjunto dos Números Reais não negativos

Tabela 1 – Conjunto Tradicionais

Dentre as operações utilizadas na teoria dos Conjuntos Tradicionais pode-se destacar a *união* representada por $\cup$, *intersecção* representado por $\cap$ e o *complemento* representada por $\neg$.

A união dos conjuntos A e B é denotado por:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\} \qquad (4)$$

Esta operação pode ser considerado como a soma de dois conjuntos

A intersecção de dois conjuntos A e B é denotada por:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\} \qquad (5)$$

O complemento representa os elementos que não fazem parte de um conjunto:

$$\neg A = \{x \mid x \in X \text{ e } x \notin A\} \qquad (6)$$

As operações de união, intersecção e complemento de Conjuntos Tradicionais possuem várias propriedades, algumas delas sumarizadas na Tabela 2, onde A, B e C são Conjuntos Tradicionais definidos sobre um universo X.

Definidos os conceitos dos Conjuntos Tradicionais, serão definidos os conceitos dos Conjuntos Fuzzy na seção seguinte.

N°	Propriedade	Representação
01	Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
02	Absorção por X e $\varnothing$	$A \cup X = X$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
03	Associatividade	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
04	Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
05	Distributividade	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
06	Idempotência	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
07	Identidade	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap X = A$
08	Involução	$\neg \neg A = A$
09	Lei de Contradição	$A \cap \neg A = \varnothing$
10	Lei De Morgan's	$\neg (A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ $\neg (A \cup B) = \neg A \cap \neg B$
11	Lei do Meio Excluído	$A \cup \neg A = X$

Tabela 2 – Propriedades Fundamentais das operações sobre Conjuntos Tradicionais

3 – Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Um Conjunto Fuzzy é definido em um universo de discurso (conjunto base) X, e caracterizado pela sua função de pertinência:

$$A : X \rightarrow [0,1] \qquad (7)$$

onde $A(x)$ representa o grau com que x pertence a A e expressa a extensão com que x se enquadra na categoria representada por A.

Uma função de pertinência particular pode ser visualizada por meio da Equação (8). Como constata-se esta função é triangular e as variáveis a, b e c são parâmetros da função.

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & se \;\; x \in [a,b) \\ \dfrac{c-x}{c-b} & se \;\; x \in [b,c] \\ 0 \;\; caso \;\; contrário & \end{cases} \qquad (8)$$

Conforme definido anteriormente, a teoria dos Conjuntos Fuzzy é uma extensão da teoria dos Conjuntos Tradicionais. Assim, as principais operações e relações entre Conjuntos Fuzzy são definidas como extensão das operações e relações tradicionais, como pode ser visto na Tabela 3, onde A e B denotam Conjuntos Fuzzy sobre um conjunto base X e $A(x)$ e $B(x)$ representam os graus de pertinência de x nos Conjuntos Fuzzy A e B respectivamente.

N°	Operação	Representação	Natureza
1	Complemento	$\neg A(x) = 1 - A(x)$	Operação
2	Diferença	$(A \neq B)$ se $A(x) \neq B(x)$ para pelo menos um elemento de $x \in X$	Relação
3	Igualdade	$(A = B)$ se $A(x) = B(x)$ para todo $x \in X$	Relação
4	Inclusão	$(A \subseteq B)$ se $A(x) \leq B(x)$ para todo $x \in X$	Relação
5	Intersecção	$A \cap B = A(x) \cap B(x) = min\ [A(x), B(x)]$	Operação
6	União	$A \cup B = A(x) \cup B(x) = max\ [A(x), B(x)]$	Operação

Tabela 3 – Operações e Relações com Conjuntos Fuzzy

Além das operações e das relações os Conjuntos Fuzzy possuem algumas características especiais. Entre tais características encontram-se: Corte α, Conjunto de Níveis, Suporte, Altura e Normalização. A seguir tais características serão apresentadas de forma sintética, supondo que A é um Conjunto Fuzzy sobre o conjunto base X.

Corte α

O Corte α (${}^{\alpha}A$) de um Conjunto Fuzzy A corresponde ao Conjunto Tradicional que contém todos os elementos do conjunto universo X com grau de pertinência em A maior ou igual a α, enquanto que o Corte α forte (${}^{\alpha+}A$) contém todos os elementos em um conjunto universo X com grau maior que α, onde $\alpha \in [0,1]$.

$$^{\alpha}A = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\} \qquad (9)$$

$$^{\alpha+}A = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\} \qquad (10)$$

Conjunto de Níveis

O Conjunto de Níveis (Λ) de um Conjunto Fuzzy A corresponde a um conjunto que contém todos os valores $\alpha \in [0,1]$ e que representam Cortes α de A distintos. O Conjunto de Níveis do Conjunto Fuzzy A é representado formalmente por:

$$\Lambda A = \{\alpha \mid A(x) = \alpha \text{ para algum } x \in X\} \qquad (11)$$

Suporte

O Suporte de um Conjunto Fuzzy A, em um conjunto universo X, é o Conjunto Tradicional que contém todos os elementos de X que possuem grau de pertinência diferente de zero em A. Claramente, o Suporte de A é exatamente o mesmo que o Corte α forte de A para α = 0. Vários símbolos especiais costumam ser usados para representar o Suporte de um conjunto, tais como: $S(A)$ ou $supp(A)$. Este trabalho usará a simbologia de ${}^{0+}A$ para esta representação.

$$^{0+}A = \{x \in X \mid A(x) > 0\} \qquad (12)$$

Altura

A Altura (h) de um Conjunto Fuzzy A corresponde ao seu maior grau de pertinência, entre todos os elementos do conjunto.

$$h(A) = \sup_{x \in X} A(x) \qquad (13)$$

Normalização

Um Conjunto Fuzzy A é chamado de *Normal* quando a sua Altura é igual a 1, ou seja, pelo menos um grau de pertinência, dos elementos do conjunto, possui valor máximo, enquanto que os conjuntos que não possuem Altura igual a um são chamados de *subnormal*. Portanto:

$$A \text{ é dito normal se } h(A) = 1$$

$$A \text{ é dito subnormal se } h(A) < 1$$

Caso um Conjunto Fuzzy possua apenas um elemento com grau de pertinência igual a um, este elemento é denominado *protótipo* do conjunto. Um Conjunto Fuzzy não normalizado pode ser normalizado por meio da divisão dos graus de pertinência de cada elemento, pelo maior grau de pertinência encontrado no conjunto.

Definidas as características especiais dos Conjuntos Fuzzy se faz necessário apresentar as Proposições Fuzzy extraídas de, para um posterior entendimento deste trabalho.

4 – Lógica Fuzzy

Uma das características da Lógica Clássica é o axioma do *Terceiro Excluído*, isto é não existe alternativa para um valor verdade além do par {*Verdadeiro*, *Falso*}. Ao lidar com problemas do mundo real, no entanto, é como que o conhecimento disponível não seja nem absolutamente verdadeiro nem absolutamente falso, podendo ser, por exemplo *paradoxais*, *incertos*, *desconhecidos*, *indeterminados*, *verdadeiros em geral*, *verdadeiros com uma certa probabilidade*, etc. Para estender a Lógica Clássica de maneira a permitir o tratamento deste tipo de conhecimento, é necessário alterar o conjunto de valores {*Verdadeiro*, *Falso*}. Dentre dos formalismos propostos para alterar este conjunto de valores encontra-se a Lógica Fuzzy.

A Lógica Fuzzy é baseada na teoria dos Conjuntos Fuzzy para sua representação. Neste tipo de Lógica há a presença de uma séries de elementos, entre estes pode-se citar as Proposições Fuzzy e a Inferência Fuzzy. Na literatura são encontrados vários métodos de inferência utilizando o paradigma Fuzzy.

5 – Proposições Fuzzy

As Proposições Fuzzy podem ser classificadas em quatro tipos:

1. Proposições Fuzzy Incondicionais e não Qualificadas;
2. Proposições Fuzzy Incondicionais e Qualificadas;
3. Proposições Fuzzy Condicionais e não Qualificadas;
4. Proposições Fuzzy Condicionais e Qualificadas.

5.1 – Proposições Fuzzy Incondicionais e não Qualificadas

A forma canônica das proposições p deste tipo, é representada pela equação

$$p : V \text{ é } F \qquad (14)$$

onde V é uma variável que assume valores x de um conjunto universo X e F é um Conjunto Fuzzy em X que representa um predicado Fuzzy tal como *alto*, *grande*, *quente* e outros.

Considere que a variável V seja a temperatura do ar em algum lugar do planeta (medido em ºF), e a função de pertinência apresentada na Tabela 4 represente, em um dado contexto, o predicado "*alta*".

Temperatura (ºF)	Grau de Pertinência
0	0
40	0
80	0.4
85	0.75
90	0.90
100	1
110	1

Tabela 4 – Conjunto base constituído por possíveis valores de temperatura para o predicado "*alta*"

A correspondente Proposição Fuzzy p, é representada pela sentença

$$p : \text{temperatura}(V) \text{ é alta}(F)$$

Dado um determinado valor de V (digamos x), este valor pertence a F com um grau de pertinência $F(x)$. Este grau de pertinência é, então, interpretado como grau verdade, $T(p)$, da proposição p.

$$T(p) = F(x) \qquad (15)$$

para cada dado valor x da variável V na proposição p.

Isto significa que T é um Conjunto Fuzzy em [0,1], que associa uma grau de pertinência $F(x)$ para cada valor x da variável V.

Em algumas proposições os valores da variável V são associados a indivíduos em um dado conjunto I, conforme descrito em (14),

A variável V torna-se uma função $V : I \to X$, onde $V(i)$ é um valor de V para cada indivíduo i em V. A forma canônica deverá então ser modificada para a forma

$$p : V(i) \text{ é } F \qquad (16)$$

onde $i \in I$.

Exemplificando, considere que I é um conjunto de pessoas, onde cada pessoa é caracterizada por sua idade, e um Conjunto Fuzzy que representa o predicado *jovem* é fornecido. Pode-se exemplificar a forma geral pela Proposição Fuzzy (16).

$$p : \text{idade}(i) \text{ é } jovem$$

onde o grau de verdade desta proposição, $T(p)$, é então determinado para cada pessoa i em I por (**17**).

$$T(p) = jovem(\text{idade}(i)) \qquad (17)$$

5.2 - Proposições Fuzzy Incondicionais e Qualificadas

As proposições p deste tipo são caracterizadas pela seguinte forma canônica

$$p : V \text{ é } F \text{ é } S \qquad (18)$$

onde V é F tem o mesmo significado, como na Equação (14), e S é um qualificador de verdade Fuzzy.

Caso seja necessário, V pode ser trocado por $V(i)$, que possui o mesmo significado da Equação (**16**). Ambos, S e F, são representados por conjuntos nebulosos em [0,1].

Por exemplo, na proposição "*Gabi* é *jovem* é *muito verdade*", o predicado *jovem* e o qualificador de verdade *muito verdade* são representados por Conjuntos Fuzzy mostrados na Tabela 5 e Tabela 6.

Idade	Grau de Pertinência
8	1
18	0.75
20	0.65
23	0.50
26	0.36
30	0.25
40	0
50	0

Tabela 5 – Conjunto Fuzzy representando o predicado *jovem*

Grau de pertinência do Conjunto Jovem	Grau de pertinência Para muito verdade
0	0
0.25	0.2
0.36	0.4
0.50	0.55
0.65	0.7
0.75	0.87
1	0.1

Tabela 6 – Conjunto Fuzzy representado o qualificador *muito verdade*

Assumindo que a idade de Gabi seja 20 anos, tal valor dentro do conjunto jovem possui grau de pertinência igual a 0.65, consequentemente, o valor de 0.65 para o conjunto *jovem* possui grau de pertinência igual a 0.70 no Conjunto Fuzzy *muito verdade*.

Em geral, o grau de verdade $T(p)$, de qualquer proposição qualificada p, é dado para cada $x \in X$ pela Equação (19).

$$T(p) = S(N(x)) \qquad (19)$$

As proposições não qualificadas são casos especiais de proposições qualificadas-verdade, em que o qualificador verdade S, assume o valor *verdadeiro*.

5.3 – Proposições Fuzzy Condicionais e não Qualificadas.

Proposições p deste tipo são representadas pela seguinte forma canônica:

$$p : \text{Se } X \text{ é } A, \text{ então } Y \text{ é } B \qquad (20)$$

onde X, Y são variáveis cujo valores estão nos conjuntos $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ respectivamente, e A e B são Conjuntos Fuzzy em $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ respectivamente.

Estas proposições podem ser vistas como proposições na forma:

$$\langle X,Y \rangle \text{ é } R \qquad (21)$$

onde R é um Conjunto Fuzzy em $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, que é determinado para cada $x \in \boldsymbol{X}$ e cada $y \in \boldsymbol{Y}$ por:

$$R(x,y) = \partial\,[A(x), B(y)] \qquad (22)$$

onde ∂ denota uma função que define como a relação R é obtida. A função ∂, apresentada detalhada, pode ser uma conjunção Fuzzy, um disjunção Fuzzy ou uma implicação Fuzzy. Neste trabalho é ilustrado o método de Implicação de Lukasiewcz definido por.

$$\partial\,(a,b) = min(1, 1 - a + b) \qquad (23)$$

Seja $A = 0.1 / x_1 + 0.8 / x_2 + 1.0 / x_3$ e $B = 0.5 / y_1 + 1 / y_2$.

Então,

$$R = 1 / x_1,\ y_1 \ + \ 1 / x_1,\ y_2 \ + \ 0.7 / x_2,\ y_1 \ + \ 1 / x_2,\ y_2 \ + \ 0.5 / x_3,\ y_1 \ + \ 1 / x_3,\ y_2$$

Isto significa, por exemplo, que

$T(p) = 1$ quando $X = x_1$ e $Y = y_1$;

$T(p) = 0.7$ quando $X = x_2$ e $Y = y_1$;

e assim por diante.

5.4 – Proposições Fuzzy Condicionais e Qualificadas

Proposições deste tipo podem ser caracterizadas pela seguinte forma canônica:

$$p : \text{Se } X \text{ é } A, \text{ então } Y \text{ é } B \text{ é } S \qquad (24)$$

O valor verdade destas proposições é obtido pela combinação dos métodos descritos nas seções 5.2 e 5.3.

Neste trabalho foram utilizadas Proposições Fuzzy Condicionais e não Qualificadas definida na seção 5.3.